Abelova cena za matematiku

Akademie věd České republiky

Matematický ústav AV ČR

věda kolem nás co to je... 121

Matematický ústav Akademie věd České republiky, v. v. i., je výzkumným pracovištěm neuniverzitního typu, jehož hlavním cílem je přispět k rozvoji světového bádání v oblasti matematiky a v příbuzných oborech.

Na počátku padesátých let minulého století vznikl Ústřední ústav matematický, který v roce 1951 získal od Jednoty československých matematiků a fyziků budovu v Žitné 25 na Novém Městě včetně její rozsáhlé knihovny. Dne 1. ledna 1953, kdy vznikla Československá akademie věd, byl Ústřední ústav matematický přejmenován na Matematický ústav ČSAV. Jeho hlavním cílem bylo rozvíjet základní výzkum v mnoha matematických oborech, jako je např. algebra, geometrie, teorie čísel, matematická a funkcionální analýza, pravděpodobnost a statistika, aplikovaná a numerická matematika, informatika, logika, topologie a matematická fyzika. Po vzniku České republiky 1. ledna 1993 se Matematický ústav stal součástí Akademie věd České republiky.

V současné době v ústavu pracuje přes 60 vědeckých pracovníků, kteří jsou rozděleni do pěti vědeckých oddělení:

- abstraktní analýza
- algebra, geometrie a matematická fyzika
- evoluční diferenciální rovnice
- konstruktivní metody matematické analýzy
- matematická logika a teoretická informatika.

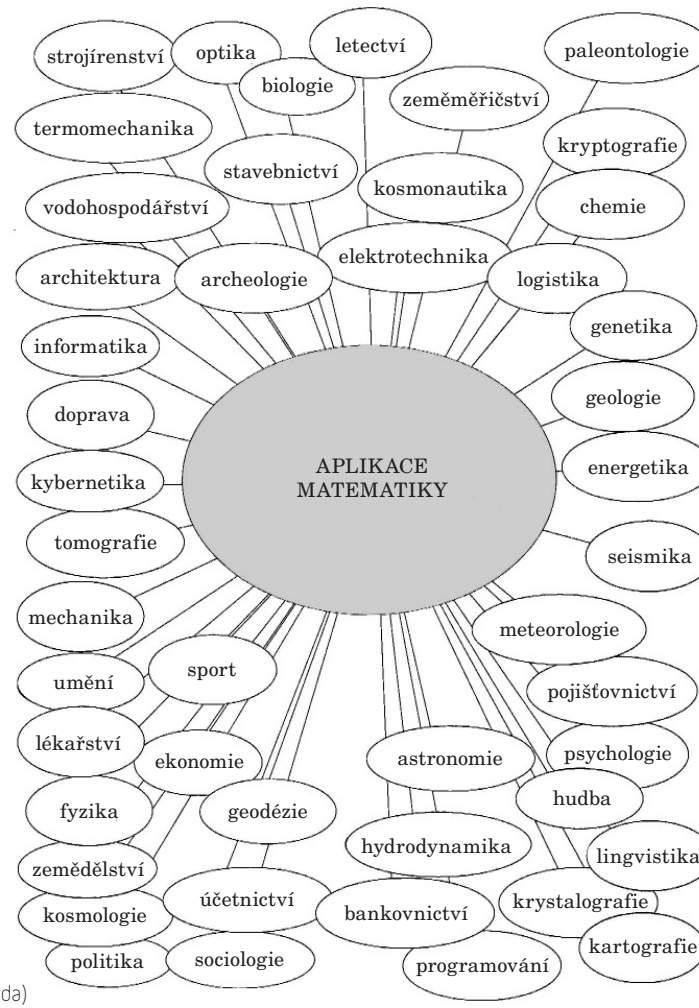
Pracovníci Matematického ústavu školí diplomanty a studenty doktorského studia, vyučují na vysokých školách, působí v redakčních radách mnoha odborných matematických časopisů, spolupracují s praxí a také s Jednotou českých matematiků a fyziků. Matematický ústav má sedmičlenný mezinárodní poradní sbor (University of Oxford, University of Minnesota, University of Amsterdam, Swansea University atd.), jehož členové se vyjadřují k zásadním vědeckým a výzkumným úkolům ústavu.

Fotografie na obálce: Abelova cena (zdroj http://www.abelprize.no)

Proč se neuděluje Nobelova cena za matematiku?

Již od antického Řecka byla matematika nazývána královnou věd a v současnosti se bez ní neobejde prakticky žádná moderní disciplína. Proto by si jistě již dávno zasloužila uznání srovnatelné s Nobelovou cenou co do významu, finanční odměny i způsobu předávání. Přesto si matematika musela počkat až do počátku 3. tisíciletí na svoje vlastní prestižní ocenění – Abelovu cenu.

V letech 2004–2021 časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* pravidelně přinášel zprávy o laureátech Abelovy ceny za matematiku. Články jsou volně dostupné v digitální matematické knihovně (viz www.dml.cz). Již v roce 2002



Obr. 1 Obrovský rozmach aplikované matematiky nastal až v průběhu 20. století (nakreslil Vojtěch Pravda)

Obr. 2 Socha Nielse Henrika Abela v Oslu (archiv autora)

vyšel v tomto časopise článek „Proč se neuděluje Nobelova cena za matematiku?“ Jeho autor vyjadřuje přesvědčení, že to bylo pravděpodobně v důsledku neshod Alfreda Nobela s významným švédským matematikem Göstou Mittagem-Lefflerem (1846–1927), žákem Weierstrassovým a zakladatelem časopisu *Acta Mathematica*. Existuje však mnohem přijatelnější vysvětlení. Alfred Nobel nezřídil Nobelovu cenu za matematiku údajně proto, že matematiku na počátku 20. století vnímal jen jako málo praktickou disciplínu. V současné době má však matematika obrovské množství praktických aplikací v mnoha oblastech lidské činnosti (viz obr. 1).

Alfred Bernhard Nobel nebyl nikdy ženatý ani neměl děti. Proto ve své závěti rozhodl, že jeho obrovský majetek bude vložen do fondu, z něhož bude každoročně udělována cena za významné vědecké objevy, literární tvorbu a zásluhy o mír ve světě. A tak po Nobelově smrti vznikla Nobelova cena za fyziku, chemii, fyziologii nebo lékařství, cena za literaturu a Nobelova cena míru.

Několik matematiků dokonce získalo Nobelovu cenu za fyziku a chemii, např. John Bardeen, John Pople či Herbert Hauptman. Nobelovu cenu za ekonomii, kterou ale Alfred Nobel nezřídil, obdrželi slavní matematici Leonid V. Kantorovič, Gérard Debreu, Kenneth Arrow a též John Nash.

Nejprestižnějším oceněním v matematice byla dříve Fieldsova medaile, která se uděluje od roku 1936 (kromě přestávky během 2. světové války). Pro matematiky ale existuje celá řada dalších ocenění, např. Fermatova cena, Kleinova cena, Lagrangeova cena, Gaussova cena a Wienerova cena za aplikovanou matematiku, ceny

společnosti SIAM, Nevanlinnova cena za matematické práce v informatice, Pólyova cena, Steelova cena, Wolfova cena a Wolfskehlova cena. Připomeňme též vyhlášení sedmi problémů pro 3. tisíciletí Millennium Prize Problems, přičemž bude vyplacen milion dolarů za každý vyřešený problém. Jeden z těchto problémů (tzv. Poincarého domněnka) byl již rozřešen. Autor příslušného důkazu, ruský matematik Grigorij Perelman, ale odmítl cenu převzít.

Mezi Nobelovou cenou a Fieldsovou medailí jsou ovšem dost podstatné rozdíly. Zatímco Nobelova cena za fyziku se udílí každoročně od roku 1901 (kromě období 1940–1942), Fieldsova medaile se předává jen jednou za čtyři roky na mezinárodním kongresu matematiků a kandidáti se podle nepsaného pravidla vybírají tak, aby jejich věk nepřesáhl 40 let. Finanční ocenění při udělení Fieldsovy medaile činí přibližně 15 000 kanadských dolarů (cca 11 000 USD), což je o dva řády menší suma než u Nobelovy ceny. Proto se Norská akademie věd rozhodla zřídit Abelovu cenu (viz www.abelprise.no) na počest geniálního norského matematika Nielse Henrika Abela (1802–1829). Tento návrh podpořil i norský parlament.

Abelova cena se uděluje každoročně za vynikající vědecké výsledky v oblasti matematiky. Její současné finanční ohodnocení 7 500 000 norských korun je srovnatelné s Nobelovou cenou. Abelovu cenu uděluje norský král a předává se v Oslu podobně jako Nobelova cena míru.

Zřízení Abelovy ceny navrhl další slavný norský matematik Sophus Lie (1842 až 1899) již na konci 19. století, jakmile se dozvěděl, že Alfred Nobel nezahrnul cenu za matematiku mezi navrhovaných pět cen. V roce 1901 byla udělena první Nobelova cena za fyziku Wilhelmu Conradu Röntgenovi. Možnost udělit Abelovu cenu za matematiku v následujícím roce 1902 při příležitosti 100. výročí Abelova narození však byla promarněna, i když ji chtěl tehdejší norský král Oscar II. finančně podporovat. Ještě nenastal ten správný čas. Uplynulo celé století, než byla Abelova cena uvedena v život. První laureát ji získal v roce 2003.

Právo nominovat kandidáta na Abelovu cenu má kdokoliv kromě sebe samého. Výběrová komise je složena z pěti mezinárodně uznávaných matematiků. Podle statutu Abelovy ceny musí být předsedou norský matematik a zvolí ho Norská akademie věd.

Předložená publikace zachycuje ve stručnosti portréty dosavadních laureátů Abelovy ceny a seznamuje čtenáře s tématy jejich vědeckého bádání, za které byla cena udělena, i s možnostmi jejich uplatnění v praxi. Přiblížit laikům výsledky vrcholné matematiky je nelehký úkol, jenž se neobejde bez použití složitého matematického aparátu, odborných termínů a matematických vzorců. Případné zájemce proto odkazujeme na další odbornou literaturu uvedenou v závěru. Z ní si pak mohou utvořit představu o složitosti a hloubce vědecké práce předních matematiků současnosti a o problémech, kterými se moderní matematika zabývá.

Kdo je Niels Henrik Abel?

Připomeňme si nyní několik základních údajů o samotném Abelovi. Niels Henrik Abel (viz obr. 2 a 3) se narodil 5. srpna 1802 v nemajetné rodině evangelického pastora jako druhý ze sedmi synů. Na podzim roku 1815 byl poslán do katedrální školy v Kristianii (v dnešním Oslu). Své nadání prokázal již v 16 letech, kdy zobecnil

Obr. 3 Niels Henrik Abel (1802–1829) (Wikimedia Commons, public domain)

známou binomickou větu pro libovolný reálný exponent. Rozšířil tak Eulerův výsledek, který podobnou větu vyslovil jen pro racionální exponent.

Kvadratickou rovnici uměli řešit již staří Řekové. Vzorce pro řešení kubické rovnice a algebraické rovnice čtvrtého stupně pomocí základních aritmetických operací (+ − × :) a odmocnin nalezl italský matematik Gerolamo Cardano (1501–1576). Abel ve svých 19 letech dokázal, že neexistuje obecné algebraické řešení rovnice pátého stupně. Podařilo se mu to v době, kdy již studoval na univerzitě v Kristianii (1821). Na jaře roku 1823 o tom publikoval svůj první článek v norském časopise pro přírodní vědy *Magazin for Naturvidenskaberne*. Následující rok si z vlastních peněz zaplatil publikování článku o algebraických rovnicích pátého stupně, který vyšel francouzsky na pouhých šesti stránkách v poněkud obtížně srozumitelném matematickém stylu vyjadřování.

Finančně jej později podporoval B. M. Holmboe (1795–1850). Roku 1825 Abel obdržel stipendium od norské vlády ke studijnímu pobytu ve Francii a Německu. Cestoval přes Kodaň, Altonu, Freiberg, Drážďany, Vídeň, s delší zajížďkou přes Benátky do Paříže. Při svém putování Evropou navštívil také Prahu, ale bohužel zde nenašel nikoho, s kým by mohl spolupracovat a diskutovat o svých matematických problémech. V Berlíně se pak spřátelil se stavebním inženýrem Augustem Crellem (1780–1855), který později založil proslulý matematický časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Crelle zůstal Abelovi otcovským přítelem. Bez nadsázky lze říct, že jej zachránil pro světovou matematiku. Rozšířenou verzi Abelova článku uveřejnil Crelle v prvním čísle svého časopisu. Abel v něm podrobně dokázal, že kořeny algebraické rovnice pátého řádu obecně nelze vyjádřit v radikálech, tj. vyčíslit je pomocí konečného počtu odmocnin a čtyř základních aritmetických operací. Tento Abelův výsledek je považován za jeden z historických milníků matematiky. Pomocí teorie grup byl později nezávisle zobecněn Évaristou Galoisem (1811–1832) na kořeny polynomů libovolného stupně většího než čtyři. Právem jsou proto Abel i Galois považováni za zakladatele teorie grup.

V roce 1828 Abel publikoval důležité pojednání o eliptických funkcích v časopise *Astronomische Nachrichten*. Teorii eliptických funkcí později rozvinul Carl G. J. Jacobi (1804–1851). V roce 1797 Carl Friedrich Gauss (1777–1855) popsal konstrukci, jak rozdělit pomocí kružítka a pravítka Bernoulliho lemniskátu na pět

stejně dlouhých částí (tj. jak zkonstruovat příslušné dělicí body, je-li lemniskáta zadána). Připomeňme, že lemniskáta je křivka, jejíž body mají konstantní součin vzdáleností od dvou pevných bodů. Abel zobecnil Gaussův postup na n stejně dlouhých částí, kde n je součin vzájemně různých Fermatových prvočísel tvaru $2^k + 1$. Zde Abel podstatně využil toho, že explicitně vyjádřil délku lemniskáty pomocí eliptických integrálů. V Crellově časopise vyšla též osmdesátistránková stať věnovaná Abelovu výzkumu v oblasti eliptických křivek.

Abel strávil spoustu času zajišťováním prostředků na svou obživu. Za jeho života se mu nedostalo uznání. Zemřel v chudobě na plicní tuberkulózu, dne 6. dubna 1829, ve věku nedožitých 27 let. Jmenování profesorem matematiky v Berlíně, o něž se postaral A. Crelle, ho již nezastihlo. Dnes je Abelovo jméno spojováno k jeho poctě s mnoha matematickými termíny: Abelovy (tj. komutativní) grupy, Abelovy integrály, Abelovy identity, Abelovy funkce, abelovská kategorie, abelovský diferenciál, abelovské rozšíření, Abelovo kritérium pro konvergenci řad aj. Kráter Abel o průměru 114 km najdeme na jihovýchodním okraji přivrácené strany Měsíce nedaleko impaktního kráteru Legendre. V norském Gjerstadu, v němž Abel strávil dětství, vzniklo Abelovo centrum podporující svým programem učitele matematiky. Abelova cena je dalším krokem k tomu, aby dílo mladého génia nebylo nikdy zapomenuto.

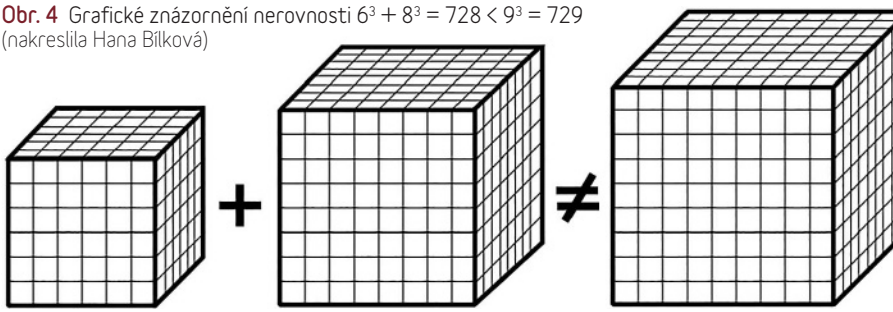
Abelova cena v roce 2016 udělena za důkaz Velké Fermatovy věty

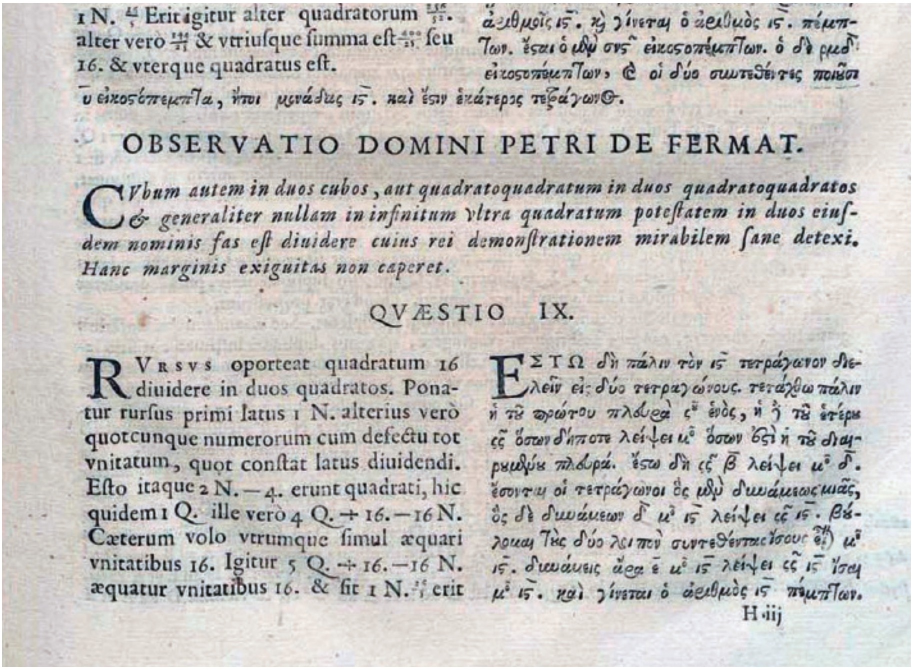
Na ukázku se nyní podívejme na jeden dobře známý problém, za nějž byla Abelova cena udělena. Dne 15. března 2016 prezident Norské akademie věd Ole M. Sejersted oznámil, že Abelovu cenu za rok 2016 obdrží britský matematik Andrew Wiles za svůj unikátní důkaz Velké Fermatovy věty pomocí modulární domněnky pro semistabilní eliptické křivky a za otevření nové epochy výzkumu v teorii čísel.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum
in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam
in infinitum ultra quadratum potestatem in duos
eiusdem nominis fas est dividere…

Pierre de Fermat

Obr. 4 Grafické znázornění nerovnosti $6^3 + 8^3 = 728 < 9^3 = 729$
(nakreslila Hana Bílková)





1 N. $\frac{4}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter vero $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ. πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοσοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοσοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσιν υ εἰκοσόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ιϛ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ϛ ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ϛ ὅσων δήποτε λεῖψει μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ϛ β λεῖψει μ° δ. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ μ° ιϛ λεῖψει ϛ ιϛ. βούλομαι τὰς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ° ιϛ. δυνάμεις ἄρα ε μ° ιϛ λεῖψει ϛ ιϛ ἴσαι μ° ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων.

H iij

Obr. 5 Ukázka z rozšířeného vydání Diofantovy *Aritmetiky* se slavnou poznámkou Pierra de Fermata. V roce 1670 ji publikoval ve francouzském Toulouse Samuel de Fermat, syn Pierra de Fermata, rozšířenou právě o poznámky svého otce (Wikimedia Commons, public domain)

Obr. 6 Andrew Wiles (*1953) (www.maths.ox.ac.uk)

Francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665) si v roce 1637 připsal na okraj svého exemplář Bachetova vydání Diofantovy *Aritmetiky* tuto poznámku:

Je nemožné napsat třetí mocninu jako součet dvou třetích mocnin nebo čtvrtou mocninu jako součet dvou čtvrtých mocnin či obecně jakékoliv číslo, které samo je mocninou větší než dva, nelze napsat jako součet dvou stejných mocnin… (Míní se jen mocniny přirozených čísel, viz obr. 4 a 5.)

Za ni pak připsal:

… cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Což volně přeloženo znamená: *Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení. Avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl.*

Tento výrok nedal spát mnoha generacím matematiků. Většinou je formulován takto:

Velká Fermatova věta: *Neexistují přirozená čísla* $n \geq 3$, x, y *a* z *taková, že*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Ve Fermatově pozůstalosti zmíněný důkaz nalezen nebyl, i když sám Fermat větu dokázal pro $n = 4$. Hledání důkazu matematikům trvalo celých 358 let. Přitom rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ má nekonečně mnoho řešení (např. $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ nebo $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$).

V roce 1770 se Leonhard Euler pokoušel dokázat Velkou Fermatovu větu pro exponent $n = 3$. V jeho důkazu však byla nalezena chyba, kterou se naštěstí později podařilo odstranit. Francouzská matematička Sophie Germaniová v roce 1819 dokázala, že vyšetřovaná rovnice nemá řešení, jestliže součin xyz není dělitelný exponentem $n \geq 3$ a jestliže n a $2n + 1$ jsou prvočísla. Byl to první výsledek, který se týkal nekonečně mnoha prvočíselných exponentů. V roce 1825 G. P. L. Dirichlet a o tři roky později i A. M. Legendre dokázali Velkou Fermatovu větu pro exponent $n = 5$ včetně případu, že n dělí xyz, který S. Germainová neuvažovala. Důkaz pro exponent $n = 7$ představili G. Lamé a V. A. Lebesgue v roce 1840. Až konečně v roce 1995 Andrew Wiles našel způsob, jak Velkou Fermatovu větu dokázat pro všechny exponenty $n \geq 3$ současně.

Andrew Wiles (viz obr. 6) živě popsal svou vlastní zkušenost s matematickým výzkumem, který trefně přirovnává k cestě neprozkoumaným zámkem plným temných komnat:

Vstoupíte do první komnaty a tam je tma. Naprostá tma. Klopýtáte kolem, vrážíte do nábytku, postupně však poznáváte, kde se jednotlivé kusy nábytku nacházejí. Nakonec, po nějakých šesti měsících najdete vypínač, stisknete jej a náhle se vše osvětlí. Víte jasně, kde se nacházíte. Pak přejdete do sousední místnosti a strávíte dalších šest měsíců v temnotě. Tak každý z těch objevů – někdy se zdají být dílem okamžiku, někdy jde o jeden či dva dny – je ve skutečnosti vyvrcholením mnoha měsíců tápání ve tmě. A bez tápání by nemohl vzniknout…

V roce 1995 Andrew Wiles zveřejnil v *Annals of Mathematics* úplný důkaz, ze kterého Velká Fermatova věta vyplývá, přičemž část důkazu je publikována ve společném článku s Richardem Taylorem. Předložený důkaz se ale opírá o celou řadu dalších netriviálních pomocných tvrzení uveřejněných v jiných časopisech.

Před rokem 1995 se někteří matematikové domnívali, že Fermatova hypotéza je nerozhodnutelné tvrzení. Sir Andrew Wiles však našel postup, jak Velkou Fermatovu větu dokázat. Její důkaz je bez nadsázky považován za „důkaz století“ a za jeden z největších triumfů současné matematiky. Metodu, kterou Andrew Wiles a Richard Taylor použili, však Pierre de Fermat nemohl znát, neboť řada pojmů (jako např. eliptické křivky, modulární formy, grupy) tehdy ještě nebyla zavedena.

Prvních 20 Abelových cen

Podívejme se nyní ve stručnosti na jednotlivé laureáty prvních dvaceti Abelových cen a za jaké matematické výsledky byli oceněni.

Jean-Pierre Serre (Abelova cena 2003)
První Abelovu cenu získal francouzský matematik Jean-Pierre Serre, který svými revolučními nápady sehrál klíčovou roli při formování mnoha odvětví soudobé matematiky. Vyvinul nové algebraické metody pro studium topologických objektů, přispěl k důkazu Velké Fermatovy věty, zabýval se teorií grafů a zobrazeními mezi sférami ve vyšších dimenzích. Některé jeho výsledky mají důležité praktické aplikace. Vytvořil například efektivní samoopravné kódy a věnoval se kryptografii s veřejným šifrovacím klíčem.

Michael Francis Atiyah, Isadore Manuel Singer (Abelova cena 2004)
Abelova cena za rok 2004 byla udělena britskému matematikovi siru Michaelu Francisi Atiyahovi a americkému matematikovi Isadoru Singerovi za objev a důkaz věty o indexu, která uvádí do souvislosti topologii, geometrii a analýzu, a za významnou roli při budování nových mostů mezi matematikou a teoretickou fyzikou. Věta o indexu je významným milníkem 20. století, který mj. ovlivnil kvantovou teorii pole. Úspěšně se tak podařilo zaplnit mezeru mezi světem čisté matematiky a částicovou fyzikou.

Peter David Lax (Abelova cena 2005)
Mnoho úloh z technické praxe lze popsat lineárními diferenciálními rovnicemi eliptického typu. Konkrétními příklady jsou rovnice popisující gravitační, elektrický a magnetický potenciál, rovnice pružnosti či rovnice ustáleného vedení tepla. Americkému matematikovi maďarského původu Peteru Laxovi se však podařilo vyvinout univerzální metodu, jak dokázat existenci právě jednoho slabého řešení takových úloh s příslušnými okrajovými podmínkami. Za fundamentální příspěvky k teorii a aplikacím diferenciálních rovnic a výpočtu jejich řešení mu byla udělena Abelova cena v roce 2005. Peter Lax mladým studentům doporučuje, aby si trénovali matematické dovednosti na řešení konkrétního problému z technické praxe. Je velkým příznivcem použití počítačů v matematice. Tvrdí, že jejich role je srovnatelná s významem dalekohledů v astronomii či mikroskopů v biologii.

Lennart Carleson (Abelova cena 2006)
V roce 1807 slavný francouzský matematik Jean Baptiste Joseph Fourier vyslovil domněnku, že každou periodickou funkci s periodou 2π lze vyjádřit jako nekonečnou

sumu funkcí sin(nx) a cos(nx) s vhodnými koeficienty, kde n jsou nezáporná celá čísla. Švédský matematik Lennart Carleson tuto domněnku kladně vyřešil v roce 1966. A právě za tento výsledek, který má obrovské množství praktických aplikací, i za své další fundamentální příspěvky k harmonické analýze a k teorii hladkých dynamických systémů byl oceněn Abelovou cenou v roce 2006. Zabýval se i fraktálním charakterem některých podivných atraktorů.

Šrínivása Varadhan (Abelova cena 2007)
Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína popisující zákonitosti jevů, jejichž výsledná hodnota není předem jistá. Důležitou roli přitom hraje řešení problému velkých odchylek v důsledku nějaké nepředvídatelné příčiny. Proto se např. staví protipovodňové zátarasy na pětisetletou vodu, telefonní sítě se zřizují předimenzované a pojišťovací společnosti se spojují do větších celků, aby lépe čelily výdajům při přírodních katastrofách. Indicko-americký matematik Šrinivása Varadhan dostal Abelovu cenu v roce 2007 za své příspěvky k teorii pravděpodobnosti, zejména za vytvoření sjednocené teorie velkých odchylek.

John Griggs Thompson, Jacques Tits (Abelova cena 2008)
Grupa je jedna z nejkrásnějších matematických struktur. Je na ní definována jen jedna asociativní binární operace s neutrálním prvkem a ke každému prvku existuje právě jeden prvek inverzní. Teorie grup má obrovské množství praktických aplikací, např. při klasifikaci krystalů, uzlů, symetrií molekul, popisu fundamentálních fyzikálních interakcí, skládání Lorentzových transformací či v teorii kódování. John G. Thompson z USA a Jacques Tits z Francie získali v roce 2008 Abelovu cenu za své zásadní příspěvky k teorii neabelovských grup, což jsou grupy, kde hodnota součinu závisí na pořadí činitelů.

Michail Gromov (Abelova cena 2009)
Slovo *geometrie* pochází z řečtiny: *gé* = země, *metró* = měření. Diferenciální geometrie je speciální podobor geometrie zabývající se vyšetřováním vlastností křivek, ploch, popř. jejich analogií ve vícerozměrném prostoru pomocí metod diferenciálního počtu. Má řadu praktických aplikací ve stavebnictví, strojírenství, geodézii, obecné teorii relativity, kosmologii aj. Klíčovými pojmy při studiu geometrických útvarů je křivost a geodetika (tj. nejkratší cesta). Rusko-francouzský matematik Michail Gromov získal v roce 2009 Abelovu cenu za své nové revoluční výsledky v oblasti diferenciální geometrie a topologie.

John Tate (Abelova cena 2010)
Teorie čísel je jednou z nejstarších vědních disciplín, rozvíjenou po několik tisíciletí. Avšak teprve ve 20. století matematici objevili obrovské množství jejích praktických aplikací například při tvorbě samodetekujících a samoopravných kódů, hašovacích funkcí, digitálního podpisu, algoritmů rychlého násobení, generování pseudonáhodných čísel, zvyšování informační bezpečnosti internetu a šifrování tajných zpráv. Americký matematik John Tate obdržel v roce 2010 Abelovu cenu zejména za své průkopnické práce v moderní algebraické teorii čísel a algebraické geometrii.

John Willard Milnor (Abelova cena 2011)
Myšlenky amerického matematika Johna Willarda Milnora výrazně formovaly architekturu matematiky ve druhé polovině 20. století. Již v roce 1956 na sebe Milnor upozornil překvapivou konstrukcí nestandardní hladké struktury na sedmirozměrné sféře. Významný je jeho přínos pro topologii, geometrii, algebru a mnoho dalších disciplín, jako je teorie uzlů, teorie čísel, teorie grup a teorie hladkých variet.

Endre Szemerédi (Abelova cena 2012)
V roce 2012 putovala Abelova cena do Maďarska k Endre Szemerédimu, který ji dostal za své fundamentální objevy v diskrétní matematice a teoretické informatice a jejich význam pro aditivní teorii čísel, teorii grafů a ergodickou teorii. Nejznámější Szemerédiho věta tvrdí, že každá nekonečná podmnožina množiny přirozených čísel s kladnou horní hustotou obsahuje aritmetickou posloupnost libovolné délky. Szemerédi též vytvořil efektivní algoritmy pro setřídění konečně mnoha prvků ve vzestupném pořadí.

Pierre René Deligne (Abelova cena 2013)
Belgický matematik Pierre René Deligne se zasloužil o nalezení nových spojitostí mezi různými oblastmi matematiky, což vedlo k řadě důležitých objevů. Jeho největším přínosem je velkolepý důkaz třetí Weilovy domněnky, což je jistá analogie slavné Riemannovy prvočíselné hypotézy nad konečnými tělesy. Za své průkopnické práce v algebraické geometrii a jejich dopad na modulární formy, eliptické křivky, hyperbolické funkce, teorii čísel, teorii reprezentací a další příbuzné obory obdržel Abelovu cenu za rok 2013.

Jakov Grigorijevič Sinaj (Abelova cena 2014)
Široké spektrum deterministických a stochastických evolučních diferenciálních rovnic popisuje například pohyby planet, oceánské proudy, fyziologické cykly, populační dynamiku, chemické reakce či chování elektrických obvodů. Časový vývoj některých takových dynamických systémů lze přitom předpovědět s vysokou pravděpodobností, zatímco jiné se zdají být chaotické, s naprosto nepředvídatelným průběhem. V roce 2014 získal ruský matematik Jakov G. Sinaj Abelovu cenu za své fundamentální příspěvky k teorii dynamických systémů, ergodické teorii a matematické fyzice.

John Forbes Nash, Louis Nirenberg (Abelova cena 2015)
Americký matematik a nositel Nobelovy ceny za ekonomii John F. Nash a kanadsko-americký matematik Louis Nirenberg obdrželi Abelovu cenu v roce 2015. John Nash přispěl svými vysoce originálními výsledky k rozvoji funkcionální analýzy, diferenciální geometrie, teorie variet a v neposlední řadě i teorie her. Louis Nirenberg je pokládán za jednoho z nejvlivnějších matematiků minulého století v oblasti moderní teorie nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Každá třída takových problémů se totiž musí vyšetřovat individuálně. K tomu bylo třeba zavést speciální prostory funkcí a vyvinout sofistikované důkazové techniky využívající příslušný tvar nelinearit.

Andrew John Wiles (Abelova cena 2016)
V roce 1637 francouzský matematik Pierre de Fermat prohlásil, že neexistují přirozená čísla $n \geq 3$, x, y a z taková, že $x^n + y^n = z^n$. Tento výrok, nazývaný Velká Fermatova věta, nedal spát mnoha generacím matematiků. Teprve po 358 letech britský matematik Andrew Wiles větu dokázal. Příslušný důkaz lze bez nadsázky považovat za jeden z největších triumfů současné matematiky a A. Wiles za něj dostal Abelovu cenu v roce 2016.

Yves Meyer (Abelova cena 2017)
Teorie waveletů (vlnek) umožňuje odstranit nežádoucí šum z jednorozměrných i vícerozměrných dat. Pomocí waveletové transformace se tak v současnosti běžně analyzují například seismické vlny, gravitační vlny, změny kurzů na finančních trzích, řeč, hudba, obrázky či video. Waveletová redukce umožňuje sledovat filmy v různých stupních rozlišení nebo uchovávat otisky prstů s dvacetinásobně menšími nároky na paměť počítače než pro bitové mapy. Za tuto klíčovou roli při rozvoji matematické teorie waveletů byla francouzskému matematikovi Yvesu Meyerovi udělena Abelova cena v roce 2017.

Robert Phelan Langlands (Abelova cena 2018)
Kanadsko-americký matematik Robert Langlands obdržel Abelovu cenu za svůj vizionářský program, který nese jeho jméno. Langlandsův program je síť domněnek, jež propojují řadu zdánlivě nesouvisejících oblastí matematiky od algebry a teorie čísel přes matematickou analýzu, diferenciální a algebraickou geometrii a teorii reprezentací až po teoretickou fyziku.

Karen Keskulla Uhlenbecková (Abelova cena 2019)
Sedmnáctou Abelovu cenu získala jako první žena americká matematička Karen Uhlenbecková za své průkopnické objevy v oblasti geometrických parciálních diferenciálních rovnic, kalibračních teorií a integrálních systémů a za dopad svých prací na matematickou analýzu, geometrii a matematickou fyziku. Její pohled na tyto obory vedl k nejdramatičtějšímu pokroku v matematice za posledních 40 let. Geometrická analýza K. Uhlenbeckové propojuje diferenciální geometrii a topologii s diferenciálními rovnicemi a teorií grup.

Hillel Fürstenberg, Grigorij Alexandrovič Margulis (Abelova cena 2020)
Lieovy grupy jsou pojmenovány po slavném norském matematikovi Sophusi Lieovi. Mají konkrétní praktické aplikace v mnoha oblastech moderní mechaniky a částicové fyziky. Americko-izraelský matematik Hillel Fürstenberg a ruský matematik Grigorij Margulis jsou průkopníky v používání ergodické teorie a teorie pravděpodobnosti v teorii čísel, teorii Lieových grup a kombinatorice, za což byli oceněni Abelovou cenou.

Lázsló Lovász, Avi Wigderson (Abelova cena 2021)
Základní problémy teoretické informatiky jsou motivovány otázkami, jak efektivně se dají řešit konkrétní problémy. Nejznámějším z těchto problémů je otázka, zda platí vztah P = NP, kde P je třída řešitelných úloh v polynomiálním čase a NP

je, zhruba řečeno, třída úloh, pro které se dá řešení ověřit v polynomiálním čase (např. úloha rozložení mnohaciferného přirozeného čísla na prvočísla). Za zásadní přínos k této problematice a dalším otevřeným problémům v teoretické informatice a diskrétní matematice (zejména teorii grafů) získali maďarský matematik Lázsló Lovász a americký matematik Avi Wigderson Abelovu cenu.

Dennis Parnell Sullivan (Abelova cena 2022)
Dvacátou Abelovu cenu za matematiku obdržel americký matematik Dennis Parnell Sullivan. Podle vyjádření výběrové komise ji získal za své fundamentální výsledky v oblasti topologie a dynamických systémů. Klasifikace vzájemně různých variet pro dimenze $d = 1, 2, 3$ je dobře známa (přitom rozřešení slavné Poincarého domněnky Grigorijem Perelmanem odpovídá $d = 3$). Případ $d = 4$ není stále vyřešen. Dennis Sullivan zavedl nové invarianty v teorii variet a stanovil podmínky pro vnoření hyperbolických variet do eukleidovských prostorů. Tím se mu podařilo vytvořit tzv. *surgery theory*, která umožňuje klasifikaci všech variet s dimenzí alespoň 5. Dále dokázal existenci univerzální limity při zdvojování period chaotických dynamických systémů.

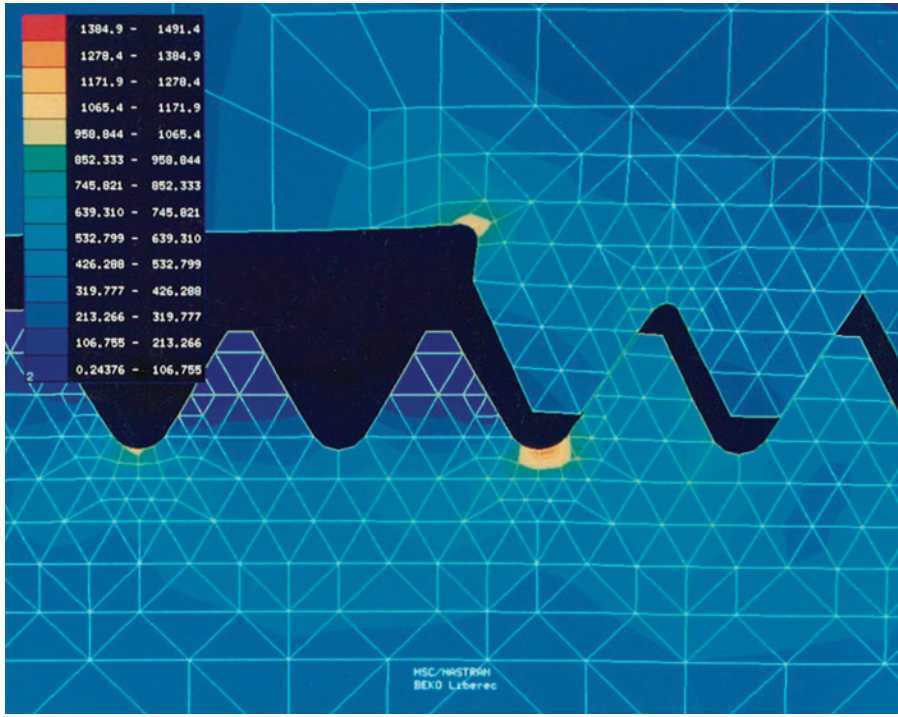
Dva konkrétní příklady praktických aplikací

Na závěr si představíme dvě ukázky skutečných technických aplikací, za něž byla udělena Abelova cena, aby bylo patrno, že matematika není jen samoúčelnou disciplínou.

V roce 2005 získal třetí Abelovu cenu Peter Lax za své fundamentální příspěvky k teorii a aplikacím parciálních diferenciálních rovnic a numerického výpočtu jejich řešení. Řada problémů matematické fyziky je popsána právě těmito rovnicemi. Jsou to například rovnice modelující chování polovodičů, namáhání křídel letadel, průhyby nosníků a mostů, mechanické napětí rámových konstrukcí či vysokotlakých nádob, proudění tekutin, rozložení teploty ve vysokonapěťových transformátorech či točivých strojích, vývin tepla během chemických reakcí apod. Pokud je daná úloha nelineární, obvykle se převádí na posloupnost lineárních úloh.

Abychom tyto nekonečně rozměrné úlohy mohli řešit na počítači, je třeba příslušné diferenciální rovnice nějakým způsobem aproximovat. K tomuto účelu americký matematik Richard Courant vyvinul v roce 1943 velice efektivní numerickou metodu pro řešení rozmanitých problémů matematické fyziky, které se v současnosti říká *metoda konečných prvků*. Hledané řešení se aproximuje po částech pomocí polynomiálních funkcí nad jistou triangulací vyšetřované oblasti (viz obr. 7). To pak vede k řešení velkých soustav lineárních algebraických rovnic. V současné době lze na superpočítačích řešit až miliardy rovnic o miliardách neznámých během několika minut.

Peter Lax navrhl univerzální metodu, jak dokázat existenci a jednoznačnost řešení jisté široké třídy problémů matematické fyziky a zároveň i existenci a jednoznačnost numerického (tj. přibližného) řešení úlohy. Jeho výsledky lze pak použít k důkazu konvergence numerického řešení k přesnému řešení původní úlohy, pokud vhodně zjemňujeme použité triangulace vyšetřované oblasti.

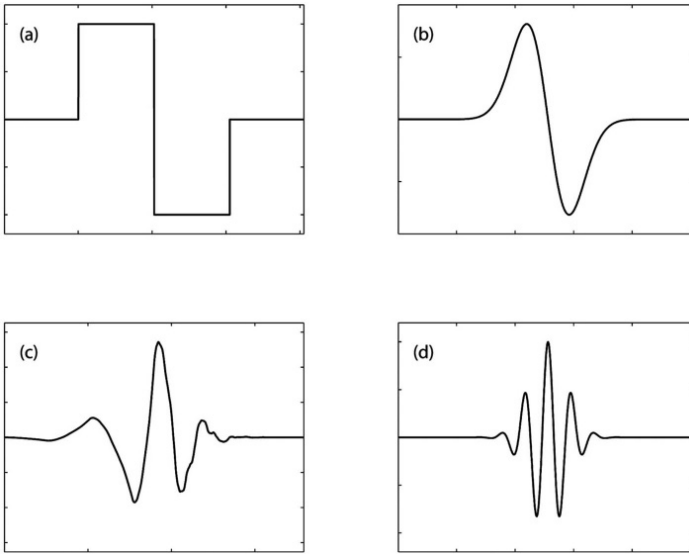


Obr. 7 Rozložení mechanického napětí v průřezu namáhaného železného šroubu s maticí (archiv autora)

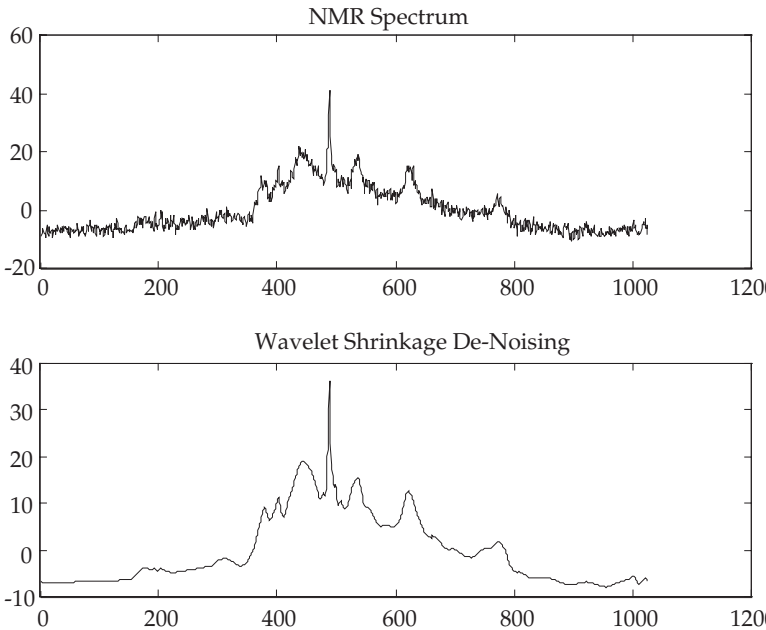
V roce 2017 získal již patnáctou Abelovu cenu Yves Meyer za své fundamentální příspěvky k teorii waveletů (vlnek) a jejím aplikacím. Jeho výsledky mají využití jak ve výpočtové matematice a informačních technologiích, tak i při vytváření příslušného počítačového softwaru.

Teorie waveletů má poměrně dlouhou historii sahající až do roku 1807, kdy Abelův současník Jean Baptiste Joseph Fourier přišel se zajímavou myšlenkou, že téměř každou funkci lze vhodně aproximovat pomocí lineární kombinace elementárních trigonometrických polynomů $\sin(nx)$ a $\cos(nx)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bouřlivý rozmach teorie waveletů nastal v osmdesátých letech minulého století při digitálním zpracování signálů. Místo funkcí sinus a kosinus se začaly používat wavelety, které jsou více lokalizovány v prostorových souřadnicích (viz obr. 8).

Wavelety umožňují lépe aproximovat funkce, jež jsou nespojité nebo jejichž grafy mají ostré hroty. Vyšetřovaný signál je rozložen pomocí elementárních waveletových funkcí do řady, čímž získáme příslušné waveletové koeficienty. Takovou waveletovou reprezentaci lze pak použít například k odstraňování šumu a zároveň se tím šetří paměť počítače. Provádí se to tak, že se z příslušné řady vypustí členy odpovídající vysokým frekvencím a malým amplitudám (viz obr. 9). Jde o nežádoucí bílý šum.



Obr. 8 Příklady několika elementárních waveletů: (a) Haarův wavelet, (b) Meyerův wavelet, (c) wavelet Daubechiesové, (d) Morletův wavelet (nakreslil Antonín Slavík)



Obr. 9 Odstranění bílého šumu: nahoře je původní signál pozměněný nežádoucím šumem a dole je jeho rekonstrukce pomocí teorie waveletů (archiv autora)

The Abel Prize

The Abel Prize for mathematics is an international prize presented by the King of Norway for outstanding results in mathematics. It is named after the well-known Norwegian mathematician Niels Henrik Abel (1802–1829) who found that there is no explicit formula for the roots of a general polynomial of degree five. The financial support of the Abel Prize is comparable with the Nobel Prize, i.e., about one million American dollars. Already in 1899, another famous Norwegian mathematician Sophus Lie proposed to establish an Abel Prize, when he learned that Alfred Nobel would not include a prize in mathematics among his five proposed Nobel Prizes. The first Nobel Prize for Physics was awarded in 1901 to Wilhelm Conrad Röntgen. Therefore, there was an attempt to organize the Abel Prize in 1902 to commemorate 100 years of Abel's birth, but it was unsuccessful. One hundred years later the Norwegian government announced that the prize would be awarded in 2002 for the two-hundredth anniversary of Abel's birth. However, the first laureate got the Abel Prize one year later. It is awarded by the Norwegian Academy of Sciences and Letters.

In this brochure, we survey the major results of the recipients of the first twenty Abel Prizes from 2003–2022. In the list below of Abel Prize winners, we include the most recent winner:

Jean-Pierre Serre (2003) – topology, algebraic geometry, and number theory
Michael F. Atiyah and Isadore M. Singer (2004) – topology, geometry, and analysis
Peter D. Lax (2005) – numerical and applied mathematics
Lennart Carleson (2006) – harmonic analysis and dynamical systems
Srinivasa S. R. Varadhan (2007) – theory of probability and statistics
John G. Thompson and Jacques Tits (2008) – algebra and theory of groups
Mikhail L. Gromov (2009) – differential geometry
John T. Tate (2010) – algebraic number theory
John W. Milnor (2011) – differential topology, geometry, and algebra
Endre Szemerédi (2012) – discrete mathematics and theoretical computer science
Pierre R. Deligne (2013) – algebraic geometry, number theory, and representation theory
Yakov G. Sinai (2014) – dynamical systems, ergodic theory, and mathematical physics
John F. Nash and Louis Nirenberg (2015) – partial differential equations and geometric analysis
Andrew J. Wiles (2016) – number theory
Yves Meyer (2017) – theory of wavelets
Robert P. Langlands (2018) – number theory, representation theory, and harmonic analysis
Karen K. Uhlenbeck (2019) – mathematical physics and gauge theory
Hillel Fürstenberg and Grigory Aleksandrovich Margulis (2020) – probability, group theory, number theory, ergodic theory, and combinatorics
Lázsló Lovász and Avi Wigderson (2021) – discrete mathematics and theoretical computer science
Dennis P. Sullivan (2022) – topology and dynamical systems

Obr. 10 Vlevo je bitová mapa otisku prstu, vpravo je její waveletový obraz, který má 26krát menší nároky na paměť počítače (foto Chris Brislawn, Los Alamos National Laboratory)

Teorie waveletů má obrovské množství dalších aplikací. Používá se například ke kompresi dat a jejich archivaci. Wavelety dokonce umožňují detekovat detaily, které nemohou být rozlišeny našimi smysly. Mají rozsáhlé použití v lékařství při rekonstrukci obrazu např. pomocí magnetické rezonance. Podstatně totiž urychlují výpočet, protože vznikají řídké algebraické struktury, které lze úsporně ukládat. Nový obor počítačového vidění využívá wavelety k digitalizaci zrakového vjemu inteligentních robotů. S wavelety se setkáváme i ve skenerech a našich chytrých mobilních telefonech. Bezeztrátové bitové mapy otisků prstů jedné osoby vyžadují cca 6 MB paměti počítače, zatímco po úpravě ztrátovou waveletovou transformací stačí paměť 26krát menší a výsledný obrázek je téměř k nerozeznání od bitové mapy (viz obr. 10).

Teorie waveletů se rovněž používá k řešení diferenciálních a integrálních rovnic. Slouží též k detekci hran či ostrých hrotů, k rozpoznávání obrazců, ke zjišťování dlouhodobých trendů (např. sezónní oscilace) či počítačovému modelování křivek a ploch. Pomocí teorie waveletů lze analyzovat struktury s velice komplikovaným tvarem (např. fraktály). Wavelety přispěly i k významným úspěchům mise Herschelova vesmírného dalekohledu a k objevu gravitačních vln.

Další doporučená literatura

M. T. Beck. Proč se neuděluje Nobelova cena za matematiku? *Pokroky mat. fyz. astronom.* 52, 2002, s. 7–8; V. Kala. Abelova cena v roce 2018 udělena za Langlandsův program. *Pokroky mat. fyz. astronom.* 68, 2018, s. 78–90; M. Křížek, L. Somer. Why quintic polynomial equations are not solvable in radicals. *Proc. Conf. Appl. Math.* Praha: Inst. of Math., Acad. Sci., 2015, s. 125–131; M. Křížek, L. Somer, M. Markl, O. Kowalski, P. Pudlák, I. Vrkoč. *Abelova cena – nejvyšší ocenění za matematiku*. Praha: Academia, 2018; J. Nešetřil. László Lovász a jeho matematika (Abelova cena za rok 2021). *Pokroky mat. fyz. astronom.* 66, 2021, s. 157–167; M. Ortaggio, V. Pravda. Abelovu cenu za rok 2019 získala Karen Uhlenbecková. *Pokroky mat. fyz. astronom.* 66, 2021, s. 1–10; P. Pudlák. Abelova cena pro Aviho Wigdersona. *Pokroky mat. fyz. astronom.* 66, 2021, 149–156; D. Saari. How many mathematicians have won Nobels? *DMV-Mitteilungen* 14-1/2006, 15.

Matematický ústav Akademie věd České republiky

Ústav každoročně organizuje množství mezinárodních vědeckých konferencí, workshopů, přednášek a více než 10 pravidelných specializovaných seminářů. Vydává tři mezinárodní vědecké časopisy: *Applications of Mathematics*, *Czechoslovak Mathematical Journal* a *Mathematica Bohemica*. Sídlí zde též lokální redakce evropského bibliografického časopisu *Zentralblatt für Mathematik*.

Veřejně přístupná knihovna Matematického ústavu disponuje oborově specializovaným knižním fondem čítajícím téměř 100 000 knihovních jednotek. Podstatná část knižního fondu již existuje v elektronické podobě. Ústav též pořádá či odborně zajišťuje vzdělávací a popularizační akce pro širší veřejnost, ať už se jedná o pravidelné letní školy, či dny otevřených dveří v rámci Týdne vědy a techniky Akademie věd ČR.

Důležitým příspěvkem k rozvoji badatelské činnosti i k financování ústavu jsou grantové prostředky. Vědečtí pracovníci ústavu pravidelně získávají celou řadu grantů (často společně s pracovníky vysokých škol) od několika grantových agentur.

Významná a důležitá je i spolupráce Matematického ústavu s obdobnými akademickými institucemi v tuzemsku i v zahraničí.

Více informací lze nalézt na www.math.cas.cz.

Matematika měla na počátku 20. století zdánlivě jen málo praktických aplikací, a proto ji údajně Alfréd Nobel nezařadil mezi Nobelovy ceny. V současnosti se ale bez matematiky neobejde téměř žádná moderní disciplína. Přesto si matematika musela počkat až do začátku 3. tisíciletí, aby získala uznání srovnatelné s Nobelovou cenou co do významu i finanční odměny: 7 500 000 norských korun. Toto ocenění se nazývá Abelova cena a uděluje se zejména za celoživotní dílo v matematických vědách. Byla pojmenována na počest geniálního norského matematika Nielse Henrika Abela. Uděluje ji norský král a předává se v norském Oslu podobně jako Nobelova cena za mír.

V EDICI VĚDA KOLEM NÁS PŘIPRAVUJEME:

Jan Hasil: **Odhalování minulosti Letenské pláně**
Štefan Pilát: **Církevněslovanská kultura v Rumunsku**
Eva Kallabová, Petr Halas: **Vcházení do obrazů a fotografií**

V EDICI DOSUD VYŠLO:

Eduard Kejnovský: **Dvanáct milníků genetiky**
Lukáš Krmíček: **Vulkanismus: vnitřní energie Země**
Václav Cílek: **Zadržování vody v krajině od pravěku do dneška**

Edice Věda kolem nás | Co to je…
Abelova cena za matematiku | *Michal Křížek*

Vydalo Středisko společných činností AV ČR, v. v. i., Nakladatelství Academia. Grafická úprava dle osnovy Jakuba Krče a sazba Serifa. Odpovědná redaktorka Petra Královcová. Vydání 1., 2022. Ediční číslo 12955. Tisk SERIFA®, s. r. o., Jinonická 80, 158 00 Praha 5.

ISSN 2464-6245
Evidováno MK ČR pod e. č. E 22344

Další svazky získáte na:
www.vedakolemnas.cz | www.academia.cz